2- Resolução de Sistemas de Equações Lineares

Um sistema de equações lineares, com m equações e n variáveis, é escrito geralmente como:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \qquad \vdots \quad = \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

onde a_{ij} são coeficientes $i = 1 \cdots m$

x_j são varáveis $j = 1 \cdots n$

b_i são constantes $i = 1 \cdots m$

A resolução de um sistema linear determina os valores de x_j $(j = 1 \cdots n)$ que satisfazem as m equações.

O sistema linear pode ser representado, usando a notação matricial, por:

A**x** = **b**

onde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ é a matriz dos coeficientes

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$ é a matriz coluna (vetor) das variáveis

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$ é a matriz coluna (vetor) constante.

Vamos chamar de x^* de vetor solução e $\bar{x}$ uma solução aproximada do sistema linear A**x** = **b**.

As situações que podem ocorrer com relação ao número de soluções de um sistema linear são:

i) Solução única (sistema determinado);
ii) Infinitas soluções (sistema indeterminado);
iii) Não admite soluções (sistema incompatível);

Vamos aprender métodos numéricos para encontrar a solução única de sistemas lineares n x n. Os métodos numéricos são divididos em dois grupos: métodos diretos e métodos iterativos.

Métodos diretos fornecem a solução exata x^*, não considerando erros de arredondamento, do sistema linear, após um número determinado de operações.

Métodos iterativos geram uma seqüência de vetor $x^{(k)}$, a partir de uma aproximação inicial $x^{(0)}$. Sob determinadas condições, esta seqüência converge para a solução x^*.

2-1– Métodos diretos

Todos os métodos estudados nos 1º e 2º graus são diretos. A Regra de Cramer aplicada a resolução de um sistema n x n envolve o cálculo de (n+1) determinantes de ordem n. Se n for igual a 30 pode-se mostrar que serão efetuadas 31x30!x29 multiplicações mais um número semelhante de adições. Assim um computador que efetuar um bilhão de multiplicações por segundo (10^9) levaria $7{,}667 \cdot 10^{18}$ anos para efetuar as multiplicações necessárias.

Métodos mais eficientes são necessários, pois problemas práticos exigem a resolução de sistemas lineares de grande porte. Os métodos de eliminação de Gaus e Jordan serão estudados mais adiante.

2-1-1– Resolução de sistemas triangulares por substituição retroativa

O sistema de equações Tx = b, onde T é uma matriz triangular superior, com elementos da diagonal diferentes de zero, é escrito como:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \ddots \quad + \quad \vdots \quad = \vdots \\ \qquad\qquad\qquad a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Da última equação obtemos:

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$$

Da penúltima equação obtemos:

$$x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1,n}x_n}{a_{n-1,n-1}}$$

Da equação n-k ; k = 2 ... n-2 obtemos:

$$x_{n-k} = \frac{b_{n-k} - a_{n-k,n-k+1}x_{n-k+1} - a_{n-k,n-k+2}x_{n-k+2} \cdots - a_{n-k,n}x_n}{a_{n-k,n-k}}$$

Finalmente

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 \cdots - a_{1n}x_n}{a_{11}}$$

Exemplo 1: Resolver o sistema:

$$\begin{cases} 3x - y + z - w = 8 \\ \quad 5y - z + w = 3 \\ \qquad\quad z + w = -5 \\ \qquad\qquad w = -3 \end{cases}$$

Da última equação: w = -3;

Substituindo na penúltima equação w = -3;

z-3 = -5
z = -5 +3
z = -2

Substituindo na 2ª equação w = -3, z = -2;

5y – (-2) + (-3) = 3
5y = 3+(-2)-(-3) = 4
y = 4/5

Substituindo na 1ª equação *w* = -3, z = -2 e *y*= 4/5;

$3x - (4/5) + (-2) - (-3) = 8$
$3x = 8 + (4/5) - (-2) + (-3)$
$3x = 7 + 4/5 = 39/5$
$x = 39/15 = 13/5$

2-1-2– Método da Eliminação de Gauss – Triangularização

O método da Eliminação de Gauss consiste em transformar o sistema de equações lineares original num sistema triangular superior equivalente que tem solução imediata, através do método da substituição retroativa, como vimos acima. Operações elementares produzem sistemas lineares equivalentes- que possuem a mesma solução do sistema original.

Operações Elementares sobre um Sistema de Equações Lineares:

a) Trocar a posição das equações;
b) Multiplicar uma equação por uma constante não nula;
c) Multiplicar uma equação por uma constante e adicionar a outra equação e, então, substituir esta nova equação por uma das existentes.

Descreveremos a seguir como o método de eliminação de Gauss usa as operações elementares para triangularizar um sistema de equações lineares. Para que isto ocorra é preciso supor que det A # 0, onde A é a matriz dos coeficientes.

Considerando que det A # o é sempre possível reescrever o sistema linear de forma que o elemento da posição a_{11} seja diferente de zero, usando somente a operação elementar de troca de linha.

Seja a representação do sistema, com a_{11} # 0, pela matriz aumentada abaixo:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & \cdots & a_{1n}^{(0)} & b_1^{(0)} \\ a_{21}^{(0)} & a_{21}^{(0)} & \cdots & a_{11}^{(0)} & b_2^{(0)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}^{(0)} & a_{n2}^{(0)} & \cdots & a_{11}^{(0)} & b_n^{(0)} \end{array}\right]$$

Vamos realizar a triangularização por etapas:

1ª ETAPA – Colocar zero abaixo do elemento da diagonal $a_{11}^{(0)}$. Ao final da 1ª etapa teremos a matriz aumentada abaixo:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & \cdots & a_{1n}^{(0)} & b_1^{(0)} \\ 0 & a_{21}^{(1)} & \cdots & a_{11}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \cdots & a_{11}^{(1)} & b_n^{(1)} \end{array}\right]$$

Para isto subtraímos da i-ésima equação da 1ª equação multiplicada por $m_{i1} = \dfrac{a_{i1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}}$, $i = 2 \cdots n$. Os m_{i1} são os multiplicadores e o elemento $a_{11}^{(0)}$ é chamado de pivô da primeira etapa. Sendo assim, $L_i = L_i - m_{i1}L_1$, $i = 2 \cdots n$, serão as linhas que substituirão as linhas antes do processo de eliminação da 1ª etapa.

2ª ETAPA – Colocar zero abaixo do elemento da diagonal $a_{22}^{(1)}$. Ao final da 2ª etapa teremos a matriz aumentada abaixo:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(0)} & \cdots & a_{1n}^{(0)} & b_1^{(0)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \cdots & a_{3n}^{(2)} & b_3^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} & b_n^{(2)} \end{array}\right]$$

Para isto subtraímos da i-ésima equação da 2ª equação multiplicada por $m_{i2} = \dfrac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$, $i = 3 \cdots n$. Os m_{i2} são os multiplicadores e o elemento $a_{22}^{(1)}$ é chamado de pivô da segunda etapa. Sendo assim, $L_i = L_i - m_{i2}L_2$, $i = 3 \cdots n$, serão as linhas que substituirão as linhas antes do processo de eliminação da 2ª etapa.

(n-1)ª ETAPA – Colocar zero abaixo do elemento da diagonal $a_{n-1,n-1}^{(n-1)}$ concluindo o processo de triangularização. Ao final da (n-1)ª etapa, da última etapa, teremos a matriz aumentada abaixo:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(0)} & \cdots & a_{1n}^{(0)} & b_1^{(0)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \cdots & a_{3n}^{(2)} & b_3^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^{(n-1)} & b_n^{(n-1)} \end{array}\right]$$

Agora o sistema é triangular superior e equivalente ao sistema de equações lineares original.

O método de eliminação efetua $\dfrac{(4n^3+3n^2-7n)}{6}$ operações. Para resolver o sistema triangular superior são efetuadas n^2 operações. Então o total de operações para se resolver um sistema linear pelo método de Eliminação de Gauss é $\dfrac{(4n^3+9n^2-7n)}{6}$. Assim um computador que efetuar um bilhão de operações por segundo (10^9) levaria $5.334.10^3$ segundos = 1.482 horas para resolver um sistema de equações lineares 20000x20000.

Exemplo 2:

Resolver o sistema de equações lineares abaixo pelo método de eliminação de Gauss:

$$\begin{cases} 3x+2y+4z=1 \\ x+y-2z=0 \\ 4x+3y-2z=2 \end{cases}$$

Trabalharemos com a matriz de coeficientes ampliada com o vetor constante

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 4 & 3 & -2 & 2 \end{array}\right]$$

1ª ETAPA:

Pivô: $a_{11}^{(0)} = 3$

$$m_{21} = 1/3$$
$$m_{31} = 4/3$$
$$L_2 \leftarrow L_2 - m_{21} \cdot L_1$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - m_{31} \cdot L_1$$

Assim teremos após a 1ª ETAPA

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1/3 & -10/3 & -1/3 \\ 0 & 1/3 & -22/3 & 2/3 \end{array}\right]$$

2ª ETAPA:

Pivô: $a_{22}^{(1)} = \frac{1}{3}$

$$m_{32} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} = 1$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - m_{32} \cdot L_2$$

Assim teremos após a 2ª ETAPA

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{10}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -4 & 1 \end{array}\right]$$

Agora resolver $Ax = b$ é equivalente a resolver $A^{(2)}x = b^{(2)}$:

$$\begin{aligned} 3x + 2y + 4z &= 1 \\ 1/3\, y - 10/3\, z &= -1/3 \\ -4z &= 1 \end{aligned}$$

Logo

$z = -1/4$

$y = -1 + 10z = -1 - 10/4 \therefore y = -\frac{14}{4} = -7/2$

$3x = 1 - 2 \cdot (-\frac{7}{2}) - 4 \cdot (-\frac{1}{4}) = 1 + 7 + 1 = 9 \therefore x = 3$

{R.: x=3, y=-7/2, z=-1/4}

2-1-2– Método da Eliminação de Jordan – Diagonalização

O método da Eliminação de Jordan consiste em transformar o sistema de equações lineares original num sistema diagonal equivalente que tem solução imediata. Ele é uma extensão do método de eliminação gaussiana. O método de eliminação de Jordan é usado para reduzir a matriz aumentada para a forma

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(0)} & 0 & \cdots & 0 & b_1^{(n)} \\ 0 & a_{21}^{(1)} & \cdots & 0 & b_2^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn}^{(n-1)} & b_n^{(n-1)} \end{array}\right]$$

O método de eliminação de Jordan para diagonalizar um sistema de equações lineares será realizado de modo análogo ao da eliminação gaussina..

Considerando que det A # o é sempre possível reescrever o sistema linear de forma que o elemento da posição a_{ii} seja diferente de zero, usando somente a operação elementar de troca de linha.

Seja a representação do sistema, com a_{11} # 0, pela matriz aumentada abaixo:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & \cdots & a_{1n}^{(0)} & b_1^{(0)} \\ a_{21}^{(0)} & a_{21}^{(0)} & \cdots & a_{11}^{(0)} & b_2^{(0)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}^{(0)} & a_{n2}^{(0)} & \cdots & a_{11}^{(0)} & b_n^{(0)} \end{array}\right]$$

Vamos realizar a diagonalização por etapas:

1ª ETAPA – Colocar zero abaixo do elemento da diagonal $a_{11}^{(0)}$. Ao final da 1ª etapa teremos a matriz aumentada abaixo:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & \cdots & a_{1n}^{(0)} & b_1^{(0)} \\ 0 & a_{21}^{(1)} & \cdots & a_{11}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \cdots & a_{11}^{(1)} & b_n^{(1)} \end{array}\right]$$

Para isto subtraímos da i-ésima equação da 1ª equação multiplicada por $m_{i1} = \dfrac{a_{i1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}},\quad i = 2\cdots n$. Os m_{i1} são os multiplicadores e o elemento $a_{11}^{(0)}$ é chamado de pivô da primeira etapa. Sendo assim, $L_i = L_i - m_{i1}L_1$, $\quad i = 2\cdots n$, serão as linhas que substituirão as linhas antes do processo de eliminação da 1ª etapa.

2ª ETAPA – Colocar zero acima e abaixo do elemento da diagonal $a_{22}^{(1)}$. Ao final da 2ª etapa teremos a matriz aumentada abaixo:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11}^{(0)} & 0 & a_{13}^{(2)} & \cdots & a_{1n}^{(2)} & b_1^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \cdots & a_{3n}^{(2)} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} & b_n^{(2)} \end{array}\right]$$

Para isto subtraímos da i-ésima equação da 2ª equação multiplicada por $m_{i2} = \dfrac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}, \quad i = 1 \cdots n, i \neq 2$. Os m_{i2} são os multiplicadores e o elemento $a_{22}^{(1)}$ é chamado de pivô da segunda etapa. Sendo assim, $L_i = L_i - m_{i2}L_2$, $\quad i = 1 \cdots n, i \neq 2$, serão as linhas que substituirão as linhas antes do processo de eliminação da 2ª etapa.

nª ETAPA – Colocar zero acima do elemento da diagonal $a_{n,n}^{(n-1)}$ concluindo o processo de triangularização. Ao final da nª etapa, a última etapa, teremos a matriz aumentada abaixo:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(0)} & 0 & \cdots & 0 & b_1^{(n-1)} \\ 0 & a_{21}^{(1)} & \cdots & 0 & b_2^{(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn}^{(n-1)} & b_n^{(n-1)} \end{array}\right]$$

Agora o sistema é diagonal e equivalente ao sistema de equações lineares original.

O método de eliminação efetua $\dfrac{4n^3 + 9n^2 - 7n}{3}$ operações (igual a 2 vezes o método de eliminação gaussiana). Para resolver o sistema diagonal superior são efetuadas *n* operações. Então o total de operações para se resolver um sistema linear pelo método de Eliminação de Jordan é $\dfrac{4n^3 + 9n^2 - 4n}{3}$. Assim um computador que efetuar um bilhão de operações por segundo (10^9) levaria $51.067.10^4$ segundos = 2.936 horas para resolver um sistema de equações lineares 20000x20000.

Exemplo 3:

Resolver o sistema de equações lineares abaixo pelo método de eliminação de Jordan:

$$\begin{cases} 3x + 2y + 4z = 1 \\ x + y - 2z = 0 \\ 4x + 3y - 2z = 2 \end{cases}$$

Trabalharemos com a matriz de coeficientes ampliada com o vetor constante

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 4 & 3 & -2 & 2 \end{array}\right]$$

1ª ETAPA:

Pivô: $a_{11}^{(0)} = 3$

$$m_{21} = \frac{1}{3}$$
$$m_{31} = \frac{4}{3}$$
$$L_2 \leftarrow L_2 - m_{21} \cdot L_1$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - m_{31} \cdot L_1$$

Assim teremos após a 1ª ETAPA

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{10}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{22}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right]$$

2ª ETAPA:

Pivô: $a_{22}^{(1)} = \frac{1}{3}$

$$m_{12} = \frac{2}{\frac{1}{3}} = 6$$
$$L_1 \leftarrow L_1 - m_{12} \cdot L_2$$

$$m_{32} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} = 1$$
$$L_3 \leftarrow L_3 - m_{32} \cdot L_2$$

Assim teremos após a 2ª ETAPA

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 24 & 3 \\ 0 & 1/3 & -10/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \end{array}\right]$$

3ª ETAPA:

Pivô: $a_{22}^{(2)} = -4$

$$m_{13} = \frac{24}{-4} = -6$$
$$L_1 \leftarrow L_1 - m_{13} \cdot L_3$$

$$m_{23} = \frac{-10/3}{-4} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$
$$L_2 \leftarrow L_2 - m_{23} \cdot L_3$$

Assim teremos após a 3ª ETAPA

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 1/3 & 0 & -7/6 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \end{array}\right]$$

Agora resolver $Ax = b$ é equivalente a resolver $A^{(2)}x = b^{(2)}$:

$$3x = 9$$
$$1/3\, y = -7/6$$
$$-4z = 1$$

Logo

$x = 3$

$y = -7/2$

$z = -1/4$

{R.: x=3, y=-7/2, z=-1/4}

2-2- Métodos Iterativos para Sistemas Lineares

Métodos iterativos permitem aproximar a solução de um sistema linear, de forma a diminuir o número de operações (relativamente aos métodos diretos), o que pode ser útil no caso de se tratar de um sistema com um grande número de equações, especialmente se a matriz possuir muitos elementos nulos. Outra utilidade é evitar definir ou armazenar a matriz, ou ainda, evitar os problemas de instabilidade numérica, que podem ocorrer num método direto.

Consideremos um sistema genérico **A x = b** escrito na forma **A = M - N.**
Supondo que **M** tem inversa, obtemos

$$\mathbf{(M-N)\,x = b \;\Leftrightarrow\; Mx = b + Nx \;\Leftrightarrow\; x = M^{-1}(b + Nx)}$$

Agora podemos definir um método iterativo que consiste em:

Escolher um vector inicial $\mathbf{x^{(0)}}$
Iteração $\mathbf{x^{(k+1)}} = \mathbf{M^{-1}\,(b + N\,x^{(k)})}$
(k=0, 1, ...N)

É importante que a matriz **M** seja muito mais simples do que **A**, porque senão estaríamos complicando o problema.

Se $\|\mathbf{M^{-1}N}\| < \mathbf{1}$, a seqüência definida pela iteração $\mathbf{x^{(k+1)}} = \mathbf{M^{-1}\,(b + N\,x^{(k)})}$**,** (k=0, 1, ...) converge para o ponto fixo do sistema de equações, qualquer que seja $x^{(0)} \in IR$. A taxa de convergência deste método iterativo é linear e a constante de convergência é menor ou igual a $\|\mathbf{M^{-1}N}\|$. Note-se a semelhança com o método iterativo simples.

Diferentes escolhas de M e N definem diferentes métodos iterativos. Considere-se a seguinte decomposição da matriz A na soma de três matrizes **A = L + D +U**,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

isto é, $A = D + L + U$, onde **L** é a matriz triangular inferior, **U** a matriz triangular superior, ambas com zeros na diagonal principal e **D** a matriz diagonal.

Notamos que a matriz diagonal **D** não deverá ter *zeros* na diagonal principal. Caso isso aconteça, deve-se efetuar uma troca de linhas ou colunas na matriz **A**, para obtermos uma matriz **D** adequada.

De entre os métodos iterativos, iremos abordar os seguintes métodos:

- *método de Jacobi*
- *método de Gauss-Seidel.*

2-2-1- Teste de Parada

Como em todos os processos iterativos, necessita-se de um critério para a parada do processo.

a) Máximo desvio absoluto:

$$\delta^{(k)} = \max_{i=1,n} \left| x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)} \right|$$

b) Máximo desvio relativo:

$$\delta_R^{(k)} = \frac{\delta^{(k)}}{\max_{i=1,n} \left| x_i^{(k)} \right|}$$

c) Número máximo de iterações:

$k \geq k_{max}$

Desta forma, dada uma precisão ε , o vetor $\underline{x}^{(k)}$ será escolhido como solução aproximada da solução exata, se $\delta^{(k)} < \varepsilon$, ou dependendo da escolha, $\delta_R^{(k)} < \varepsilon$. No caso em $k \geq k_{max}$, $\underline{x}^{(k_{max})}$ será escolhido como solução aproximada da solução exata.

2-2-2 Método de Jacobi

Vamos supor que A foi reordenada de modo que todos os seus elementos da diagonal sejam não-nulos $a_{ii} \neq 0, \forall i \leq n$. No caso do método de Jacobi, consideramos A=D + L + U = M - N

$$\mathbf{M = D}$$
$$\mathbf{N = -(L + U)}$$

Portanto, o método consiste em

Iterada inicial $\mathbf{x}^{(0)}$
Iteração $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{b} + \mathbf{N}\,\mathbf{x}^{(k)})$
(k=0, 1, ...N)

ou ainda

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right)$$

Na prática vamos então tirar o valor de cada x_i na i-ésima equação (i = 1, 2, . . ., n). Como assumimos que a_{ii} é não nulo, podemos escrever:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \cdots - a_{1n}x_n) \\
x_2 &= \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \cdots - a_{2n}x_n) \\
x_3 &= \frac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2 - \cdots - a_{3n}x_n) \\
\vdots &= \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
x_n &= \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1})
\end{aligned}$$

Se considerarmos o lado esquerdo do sistema como os elementos de um novo passo de iteração (k+1) e os elementos do lado direito como elementos do passo anterior (k), teremos:

$$\begin{aligned}
x_1^{[k+1]} &= \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{[k]} - a_{13}x_3^{[k]} - \cdots - a_{1n}x_n^{[k]}) \\
x_2^{[k+1]} &= \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{[k]} - a_{23}x_3^{[k]} - \cdots - a_{2n}x_n^{[k]}) \\
x_3^{[k+1]} &= \frac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1^{[k]} - a_{32}x_2^{[k]} - \cdots - a_{3n}x_n^{[k]}) \\
\vdots &= \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
x_n^{[k+1]} &= \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1^{[k]} - a_{n2}x_2^{[k]} - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{[k]})
\end{aligned}$$

Exemplo: Resolver o sistema abaixo pelo método de Jacobi.

$$\begin{cases} 30x - 10y - 2z = 78 \\ x + 70y - 3z = -120 \\ 3x - 2y + 100z = 900 \end{cases}$$

O sistema acima produz as seguintes equações do procedimento iterativo

$$x^{[k+1]}=\frac{78+10y^{[k]}+2z^{[k]}}{30}$$
$$y^{[k+1]}=\frac{-120-x^{[k]}+3z^{[k]}}{70}$$
$$z^{[k+1]}=\frac{900-3x^{[k]}+2y^{[k]}}{100}$$

Assumindo

$$x^{[0]}=(x^{[0]},y^{[0]},z^{[0]})$$
$$=(0,0,0)$$

Realizamos a 1ª iteração

$$x^{[1]}=\frac{78+10y^{[0]}+2z^{[0]}}{30}=\frac{78+10\times 0+2\times 0}{30}=2.6$$
$$y^{[1]}=\frac{-120-x^{[0]}+3z^{[0]}}{70}=\frac{-120-0-3\times 0}{70}=-1.71$$
$$z^{[1]}=\frac{900-3x^{[0]}+2y^{[0]}}{100}=\frac{900-3\times 0+2\times 0}{100}=9$$
$$E=\max(|x^{[1]}-x^{[0]}|,|y^{[1]}-y^{[0]}|,|z^{[1]}-z^{[0]}|)$$
$$E=\max(|2.6-0|,|-1.71-0|,|9-0|)=9$$

Realizamos a 2ª iteração

$$x^{[2]}=\frac{78+10y^{[1]}+2z^{[1]}}{30}=\frac{78+10\times -1.71+2\times 9}{30}=2.63$$
$$y^{[2]}=\frac{-120-x^{[1]}+3z^{[1]}}{70}=\frac{-120-2.6-3\times 9}{70}=-1.37$$
$$z^{[2]}=\frac{900-3x^{[1]}+2y^{[1]}}{100}=\frac{900-3\times 2.6+2\times -1.71}{100}=8.89$$
$$E=\max(|x^{[2]}-x^{[1]}|,|y^{[2]}-y^{[1]}|,|z^{[2]}-z^{[1]}|)$$
$$E=\max(|2.63-2.6|,|-1.37-(-1.71)|,|8.89-9|)=0.34$$

Realizamos a 3ª iteração

$$x^{[3]} = \frac{78+10y^{[2]}+2z^{[2]}}{30} = \frac{78+10\times-1.37+2\times8.89}{30} = 2.74$$
$$y^{[3]} = \frac{-120-x^{[2]}+3z^{[2]}}{70} = \frac{-120-2.63-3\times8.89}{70} = -1.37$$
$$z^{[3]} = \frac{900-3x^{[2]}+2y^{[2]}}{100} = \frac{900-3\times2.63+2\times-1.37}{100} = 8.89$$
$$E = \max(|x^{[3]}-x^{[2]}|, |y^{[3]}-y^{[2]}|, |z^{[3]}-z^{[2]}|)$$
$$E = \max(|2.74-2.63|, |-1.37-(-1.37)|, |8.89-8.89|) = 0.11$$

Realizamos a 4ª iteração

$$x^{[4]} = \frac{78+10y^{[3]}+2z^{[3]}}{30} = \frac{78+10\times-1.37+2\times8.89}{30} = 2.74$$
$$y^{[4]} = \frac{-120-x^{[3]}+3z^{[3]}}{70} = \frac{-120-2.74-3\times8.89}{70} = -1.37$$
$$z^{[4]} = \frac{900-3x^{[3]}+2y^{[3]}}{100} = \frac{900-3\times2.74+2\times-1.37}{100} = 8.89$$
$$E = \max(|x^{[4]}-x^{[3]}|, |y^{[4]}-y^{[3]}|, |z^{[4]}-z^{[3]}|)$$
$$E = \max(|2.74-2.74|, |-1.37-(-1.37)|, |8.89-8.89|) < 0.01$$

Tabela resumo do Método de Jacobi

k	$x^{[k]}$	$y^{[k]}$	$z^{[k]}$	$\varepsilon^{[k]}$
0	0	0	0	-
1	2.6	-1.71	9	9
2	2.63	-1.37	8.89	0.34
3	2.74	-1.37	8.89	0.11
4	2.74	-1.37	8.89	<0.01

2-2-3- Método de Gauss-Seidel

No caso do método de Gauss-Seidel, poderemos considerar A = D + L + U = M - N

M = D + L

N = - U

Portanto o método consiste em

Iterada inicial $\mathbf{x}^{(0)}$
Iterarão $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{(D+L)^{-1}[\,b - U\,x^{(k)}\,]}$
(k=0, 1, ...N)

O princípio do método de Gauss-Seidel é usar nova informação tão logo ela esteja disponível. Neste caso escolhe-se

Então:

$(\mathbf{D} + \mathbf{L})\mathbf{x}^{(\mathbf{k+1})} = [\ \mathbf{b} - \mathbf{U}\ \mathbf{x}^{(\mathbf{k})}\ ] \quad (\ \mathbf{k} = 0, 1, \ldots)$

$\mathbf{x}^{(\mathbf{k+1})} = \mathbf{D}^{-1}\ [\ \mathbf{b} - \mathbf{L}\mathbf{x}^{(\mathbf{k+1})} - \mathbf{U}\ \mathbf{x}^{(\mathbf{k})}\ ] \quad (\ \mathbf{k} = 0, 1, \ldots)$

Iterada inicial $\mathbf{x}^{(0)}$
Iterarção $\mathbf{x}^{(\mathbf{k+1})} = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{b} - \mathbf{L}\ \mathbf{x}^{(\mathbf{k+1})} - \mathbf{U}\ \mathbf{x}^{(\mathbf{k})}$
(k=0, 1, ...)

ou ainda

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}\right)$$

Se considerarmos o lado esquerdo do sistema como os elementos de um novo passo de iteração (k+1) e os elementos do lado direito como elementos novos tão logo eles estejam disponíveis, teremos:

$$\begin{aligned}
x_1^{[k+1]} &= \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{[k]} - a_{13}x_3^{[k]} - \cdots - a_{1n}x_n^{[k]}) \\
x_2^{[k+1]} &= \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{[k+1]} - a_{23}x_3^{[k]} - \cdots - a_{2n}x_n^{[k]}) \\
x_3^{[k+1]} &= \frac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1^{[k+1]} - a_{32}x_2^{[k+1]} - \cdots - a_{3n}x_n^{[k]}) \\
\vdots &= \qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\
x_n^{[k+1]} &= \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1^{[k+1]} - a_{n2}x_2^{[k+1]} - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{[k+1]})
\end{aligned}$$

Exemplo: Resolver o sistema abaixo pelo método de Gauss-Seidel.

$$\begin{cases} 30x - 10y - 2z = 78 \\ x + 70y - 3z = -120 \\ 3x - 2y + 100z = 900 \end{cases}$$

O sistema acima produz as seguintes equações do procedimento iterativo

$$x^{[k+1]} = \frac{78+10y^{[k]}+2z^{[k]}}{30}$$
$$y^{[k+1]} = \frac{-120-x^{[k+1]}+3z^{[k]}}{70}$$
$$z^{[k+1]} = \frac{900-3x^{[k+1]}+2y^{[k+1]}}{100}$$

Assumindo

$$\begin{aligned} x^{[0]} &= (x^{[0]}, y^{[0]}, z^{[0]}) \\ &= (0,0,0) \end{aligned}$$

Realizamos a 1ª iteração

$$x^{[1]} = \frac{78+10y^{[0]}+2z^{[0]}}{30} = \frac{78+10\times0+2\times0}{30} = 2.6$$
$$y^{[1]} = \frac{-120-x^{[1]}+3z^{[0]}}{70} = \frac{-120-2.6-3\times0}{70} = -1.75$$
$$z^{[1]} = \frac{900-3x^{[1]}+2y^{[1]}}{100} = \frac{900-3\times2.6+2\times-1.75}{100} = 8.89$$
$$E = \max(|x^{[1]}-x^{[0]}|, |y^{[1]}-y^{[0]}|, |z^{[1]}-z^{[0]}|)$$
$$E = \max(|2.6-0|, |-1.75-0|, |8.89-0|) = 8.89$$

Realizamos a 2ª iteração

$$x^{[2]} = \frac{78+10y^{[1]}+2z^{[1]}}{30} = \frac{78+10\times-1.75+2\times8.89}{30} = 2.61$$
$$y^{[2]} = \frac{-120-x^{[2]}+3z^{[1]}}{70} = \frac{-120-2.61-3\times8.89}{70} = -1.37$$
$$z^{[2]} = \frac{900-3x^{[2]}+2y^{[2]}}{100} = \frac{900-3\times2.61+2\times-1.37}{100} = 8.89$$
$$E = \max(|x^{[2]}-x^{[1]}|, |y^{[2]}-y^{[1]}|, |z^{[2]}-z^{[1]}|)$$
$$E = \max(|2.61-2.6|, |-1.37-(-1.75)|, |8.89-8.89|) = 0.38$$

Realizamos a 3ª iteração

$$x^{[3]} = \frac{78 + 10y^{[2]} + 2z^{[2]}}{30} = \frac{78 + 10\times -1.37 + 2\times 8.89}{30} = 2.74$$

$$y^{[3]} = \frac{-120 - x^{[3]} + 3z^{[2]}}{70} = \frac{-120 - 2.74 - 3\times 8.89}{70} = -1.37$$

$$z^{[3]} = \frac{900 - 3x^{[3]} + 2y^{[3]}}{100} = \frac{900 - 3\times 2.74 + 2\times -1.37}{100} = 8.89$$

$$E = \max(|x^{[3]} - x^{[2]}|, |y^{[3]} - y^{[2]}|, |z^{[3]} - z^{[2]}|)$$

$$E = \max(|2.74 - 2.61|, |-1.37 - (-1.37)|, |8.89 - 8.89|) = 0.13$$

Realizamos a 4ª iteração

$$x^{[4]} = \frac{78 + 10y^{[3]} + 2z^{[3]}}{30} = \frac{78 + 10\times -1.37 + 2\times 8.89}{30} = 2.74$$

$$y^{[4]} = \frac{-120 - x^{[4]} + 3z^{[3]}}{70} = \frac{-120 - 2.74 - 3\times 8.89}{70} = -1.37$$

$$z^{[4]} = \frac{900 - 3x^{[4]} + 2y^{[4]}}{100} = \frac{900 - 3\times 2.74 + 2\times -1.37}{100} = 8.89$$

$$E = \max(|x^{[4]} - x^{[3]}|, |y^{[4]} - y^{[3]}|, |z^{[4]} - z^{[3]}|)$$

$$E = \max(|2.74 - 2.74|, |-1.37 - (-1.37)|, |8.89 - 8.89|) < 0.01$$

Tabela resumo do Método de Gauss-Seidel

k	$x^{[k]}$	$y^{[k]}$	$z^{[k]}$	$\varepsilon^{[k]}$
0	0	0	0	-
1	2.6	-1.75	8.89	8.89
2	2.61	-1.37	8.89	0.38
3	2.74	-1.37	8.89	0.13
4	2.74	-1.37	8.89	<0.01

2-2-4 Critérios de convergência

Começamos por notar que o método iterativo $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{b} + \mathbf{N}\, \mathbf{x}^{(k)})$ pode ser escrito como

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{C}\, \mathbf{x}^{(k)} + d$$

designando $\mathbf{C} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}$ e $d = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{b}$.

Teorema: *(Condições Necessárias e Suficientes de Convergência)* O método iterativo $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{C}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{d}$ converge com qualquer valor inicial $\mathbf{x}^0$ se, e somente se, $\rho(C) < 1$, sendo $\rho(C)$ o raio espectral (maior autovalor em módulo) da matriz de iteração C.

Notando que:

- Método de Jacobi, $\mathbf{C = - D^{-1}(L + U)}$
- Método de Gauss-Seidel, $\mathbf{C = - (L + D)^{-1} U}$

A determinação do raio espectral da matriz de iteração $\rho(C)$ requer, em geral, maior esforço computacional que a pró pia solução do sistema Ax = b. Por isto usa-se normalmente condições suficientes de convergência.

Observação:
Se existir uma norma induzida ||.|| : ||**C**|| < 1 então é claro que que isso se irá verificar, porque $\|\mathbf{e}^{(k)}\| = \|\mathbf{C}^k \mathbf{e}^{(0)}\| \le \|\mathbf{C}\|^k \|\mathbf{e}^{(0)}\| \to 0$, quando k tende para infinito, qualquer que seja o $\mathbf{e}^{(0)}$, fixo pela iterada inicial.

Observação: Podemos falar também de ordem de convergência, no caso vectorial, e estas majorações revelam que estes métodos iterativos têm uma convergência linear.

2-2-4-1- Critérios Suficientes de Convergência

Para além do teorema, que nos dá condições necessárias e suficientes de convergência, existem critérios mais simples que asseguram a convergência para qualquer iterada inicial. No entanto, essas condições, que iremos deduzir, são apenas *condições suficientes*.

Repare-se, por exemplo, no caso do método de Jacobi. Como $\mathbf{C = D^{-1} (L + U)}$

$$c_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i=j \\ -\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}} & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

e relembrando que

$$\|\mathbf{C}\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |c_{ij}|$$

ao exigirmos que a norma do máximo seja inferior a 1, isto significa

$$\max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} \left| -\frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| < 1$$

Logo, uma condição *suficiente* que nos garante isso, é

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}| \qquad (i = 1, \dots, n)$$

neste caso, diz-se que a matriz **A** tem ***diagonal estritamente dominante por linhas***.

De forma análoga (usando uma norma semelhante à das colunas), podemos concluir que se

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{ij}| < |a_{jj}| \qquad (j = 1, \dots, n)$$

isto é, se a matriz **A** tem ***diagonal estritamente dominante por colunas***, então o método de Jacobi converge.

Este raciocínio pode-se aplicar também ao método de Gauss-Seidel e obtemos :

Teorema : *(Condição Suficiente de Convergência)*
Se a matriz **A** tiver a diagonal estritamente dominante por linhas ou por colunas, os métodos de Jacobi e de Gauss-Seidel convergem, para qualquer vector inicial $\mathbf{x}^{(0)}$ escolhido.

Observação:
Como $\mathbf{C = M^{-1}N = M^{-1} (A - M) = I - M^{-1}A}$ quanto mais próxima de **A** fôr a matriz **M**, mais próximo da matriz zero será valor de **C**, e consequentemente, mais rápida será a convergência do método iterativo.

Nos casos dos métodos que estudamos, normalmente **M** está "mais próxima" de **A** no caso do Método de Gauss-Seidel (**M = D + L**) do que no caso do Método de Jacobi (**M = D**).

Portanto, habitualmente o método de Gauss-Seidel converge mais rapidamente. Há, no entanto, casos em que isso não acontece, um método pode convergir e o outro não!

Número de Operações: A menos que as matrizes possuam zonas apreciáveis com elementos nulos, ambos os métodos iterativos exigem um cálculo total de $\sim 2n^2$ operações, por cada iterada, o que implica que, se forem necessárias mais que $\sim n/3$ iterações, exigimos mais operações do que num método direto.

3- Exercícios propostos

4 - Praticando com ajuda do Mathcad

4-1– Uso das funções internas do Mathcad : lsolve e find.

A função lsolve do Mathcad usa a notação matricial e a função find é para ser usado em bloco de solução. Varemos ambos os usos na solução dos sistemas de equações abaixo:

a)

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 3x - 2y = -12 \quad \{R.: x = -2, \quad y = 3\} \end{cases}$$

Usando find temos a planilha:

given $\quad 2x + 3y = 5$

$3x - 2y = -12 \qquad \text{find}(x, y) \rightarrow \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Usando lsolve temos a planilha

$$\text{lsolve}\left[\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -12 \end{pmatrix}\right] \rightarrow \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{cases} 3x/4 + 5y/6 = 29 \\ 5x/6 - 3y/4 = -8 \quad \{R.: x = 12, \quad y = 24\} \end{cases}$$

Usando find temos a planilha:

given $\quad \frac{3x}{4} + \frac{5y}{6} = 29$

$\frac{5x}{6} - \frac{3y}{4} = -8 \qquad \text{find}(x, y) \rightarrow \begin{pmatrix} 12 \\ 24 \end{pmatrix}$

Usando lsolve temos a planilha

$$\text{lsolve}\left[\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{5}{6} \\ \frac{5}{6} & \frac{-3}{4} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 29 \\ -8 \end{pmatrix}\right] \rightarrow \begin{pmatrix} 12 \\ 24 \end{pmatrix}$$

c)

$$\begin{cases} 2/a - 1/b = 7 \\ 3/a + 5/b = -9 \end{cases} \quad \{R.: a = 1/2, \quad b = -1/3\}$$

Usando find temos a planilha:

given $\quad \frac{2}{a} - \frac{1}{b} = 7$

$\frac{3}{a} + \frac{5}{b} = -9 \qquad \text{find}(a, b) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{3} \end{pmatrix}$

Usando lsolve temos a planilha

$$\text{lsolve}\left[\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ -9 \end{pmatrix}\right] \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Portanto 1/a = 2 e 1/b = -3, então a = 1/2 e b= -1/3 .

d)

$$\begin{cases} x + 5z - 2u + t = 10 \\ 4y - 3z + 7u = -14 \\ 9x + 8y + 10u = 31 \\ 2x + 20y - 13z + t = -2 \\ 6x + 4y + 3z + 2u + 4t = 1 \end{cases} \quad \{R.: x = -5, \quad y = 0.75, \quad z = 1, \quad u = -2, \quad t = 6\}$$

Usando find temos a planilha:

given $\quad x + 5z - 2u + t = 10$

$4y - 3z + 7u = -14$

$-9x + 8y + 10u = 31$

$2x + 20y - 13z + t = -2$

$5x + 4y + 3z + 2u + 4t = 1 \qquad \text{find}(x, y, z, u, t) \rightarrow \begin{pmatrix} -5 \\ \frac{3}{4} \\ 1 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$

Usando lsolve temos a planilha

$$\text{lsolve}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -3 & 7 & 0 \\ -9 & 8 & 0 & 10 & 0 \\ 2 & 20 & -13 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 \\ -14 \\ 31 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \rightarrow \begin{pmatrix} -5 \\ \frac{3}{4} \\ 1 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Pode-se utilizar o cálculo simbólico ($\rightarrow$, digite CTRL+.) ou o cálculo numérico (= , digite =) quando usa-se lsolve

$$\text{lsolve}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -3 & 7 & 0 \\ -9 & 8 & 0 & 10 & 0 \\ 2 & 20 & -13 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 \\ -14 \\ 31 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} -5 \\ 0.75 \\ 1 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Exercícios Resolvidos:

Resolver os sistemas:

1)

$$\begin{cases} x+3y-z-t=7 \\ 2x-2y+z+3t=8 \\ 3x-y+z-4t=8 \\ 4x+y-z-2t=7 \quad \{R.: x=3, \quad y=4, \quad z=7, \quad t=1\} \end{cases}$$

given

$$x+3y-z-t=7$$

$$2x-2y+z+3t=8$$

$$3x-y+z-4t=8$$

$$4x+y-z-2t=7 \qquad \text{find}(x,y,z,t) \rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2)

$$\begin{cases} 2x-3y+2z-4t+u=10 \\ x+2y+4z+8t-5u=3 \\ 5x+3y-6z+4t-3u=-4 \\ x-y+z-2t+2u=6 \\ 3x+2y-3z+2t-u=-1 \quad \{R.: x=2, \quad y=-1, \quad z=3/2, \quad t=1/4, \quad u=1\} \end{cases}$$

Given

$$2x-3y+2z-4t+u=10$$

$$x+2y+4z+8t-5u=3$$

$$5x+3y-6z+4t-3u=-4$$

$$x-y+z-2t+2u=6$$

$$3x+2y-3z+2t-u=-1 \qquad \text{Find}(x,y,z,t,u) \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ \frac{3}{2} \\ \frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exemplo 1: Resolver o sistema triangular:

$$\begin{cases} 3x-y+z-w=8 \\ \quad 5y-z+w=3 \\ \qquad z+w=-5 \\ \qquad\quad w=-3 \end{cases}$$

Usando-se given ... find no Mathcad

given

$$3x-y+z-w=8$$

$$5y-z+w=3$$

$$z+w=-5$$

$$w=-3 \qquad \text{find}(x,y,z,w) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{13}{5} \\ \frac{4}{5} \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Também se pode usar a ferramenta solve da caixa de ferramentas Symbolic do Mathcad como mostra a planilha abaixo:

$$3x - y + z - w = 8 \text{ solve}, x \rightarrow \frac{8}{3} + \frac{1}{3}\cdot y - \frac{1}{3}\cdot z + \frac{1}{3}\cdot w$$

$$5y - z + w = 3 \text{ solve}, y \rightarrow \frac{1}{5}\cdot z - \frac{1}{5}\cdot w + \frac{3}{5}$$

$$z + w = -5 \text{ solve}, z \rightarrow -w - 5$$

$$w = -3 \text{ solve}, w \rightarrow -3$$

$w := -3 \qquad w = -3$

$z := -w - 5 \qquad z = -2$

$y := \frac{1}{5}\cdot z - \frac{1}{5}\cdot w + \frac{3}{5} \qquad y = 0.8$

$x := \frac{8}{3} + \frac{1}{3}\cdot y - \frac{1}{3}\cdot z + \frac{1}{3}\cdot w \qquad x = 2.6$

Programa 1.1 – Solução de um sistema triangular superior por substituição retroativa.

```
SR(a,b) := | n ← last(b)
           | for i ∈ 0..n
           |   | iv ← n − i
           |   | x_iv ← b_iv
           |   | for j ∈ iv + 1..n           if i > 0
           |   |   | jv ← j
           |   |   | x_iv ← x_iv − a_iv,jv · x_jv
           |   | x_iv ← x_iv / a_iv,iv
           | x
```

$$SR\left[\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 2.6 \\ 0.8 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Exemplo 2:

Resolver o sistema de equações lineares abaixo pelo método de eliminação de Gauss:

$$\begin{cases} 3x+2y+4z=1 \\ x+y-2z=0 \\ 4x+3y-2z=2 \end{cases}$$

Para conferir o resultado, usando a função lsolve do Mathcad, temos:

$$\text{lsolve}\left[\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right] \rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{-7}{2} \\ \frac{-1}{4} \end{pmatrix}$$

Podemos usar o Mathcad para fazer os cálculos vetoriais da eliminação:

Matriz ampliada:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 4 & 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

1ª Etapa

$$m_{21} := \frac{1}{3} \qquad m_{31} := \frac{4}{3}$$

Linha 2: $-m_{21}(2\ \ 4\ \ 1) + (1\ \ -2\ \ 0) \rightarrow \left(\frac{1}{3}\ \ \frac{-10}{3}\ \ \frac{-1}{3}\right)$

Linha 3: $-m_{31}(2\ \ 4\ \ 1) + (3\ \ -2\ \ 2) \rightarrow \left(\frac{1}{3}\ \ \frac{-22}{3}\ \ \frac{2}{3}\right)$

Matriz ampliada após 1ª etapa:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{-10}{3} & \frac{-1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{-22}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

2ª Etapa

$$m_{32} := \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} \qquad m_{32} = 1$$

Linha 3: $-m_{32}\left(\frac{-10}{3} \quad \frac{-1}{3}\right) + \left(\frac{-22}{3} \quad \frac{2}{3}\right) \rightarrow (-4 \quad 1)$

Matriz ampliada após 2ª etapa:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{-10}{3} & \frac{-1}{3} \\ 0 & 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Resolveldo o sistema de equação triangular superior:

$$3x + 2y + 4z = 1$$

$$\frac{1}{3}y - \frac{10}{3}z = \frac{-1}{3}$$

$$-4z = 1$$

$$-4z = 1 \text{ solve}, z \rightarrow \frac{-1}{4}$$

$$z := \frac{-1}{4}$$

$$\frac{1}{3}y - \frac{10}{3}z = \frac{-1}{3} \text{ solve}, y \rightarrow \frac{-7}{2}$$

$$y := \frac{-7}{2}$$

$$3x + 2y + 4z = 1 \text{ solve}, x \rightarrow 3$$

{ R.: x=3 , y= -7/2 , z=-1/4}

Programa 1.2 – Solução de um sistema triangular superior por substituição retroativa

$$
TGauss(a,b) := \left|
\begin{array}{l}
n \leftarrow last(b) \\
\text{for } k \in 0..n-1 \\
\quad \text{for } i \in k+1..n \\
\qquad \left|
\begin{array}{l}
\text{for } j \in k+1..n \\
\quad a_{i,j} \leftarrow \dfrac{-a_{i,k}}{a_{k,k}} \cdot a_{k,j} + a_{i,j} \\
b_i \leftarrow \dfrac{-a_{i,k}}{a_{k,k}} \cdot b_k + b_i
\end{array}
\right. \\
\text{for } j \in 0..n-1 \\
\quad \text{for } i \in j+1..n \\
\qquad a_{i,j} \leftarrow 0 \\
(a \;\; b)
\end{array}
\right.
$$

Dada a matriz dos coeficientes e o vetor dos termos independentes de um sistema de equações lineares:

$$
A := \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad b := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}
$$

Aplicando a função **TGauss** acima teremos o sistema triangular superior:

$$
TGauss(A,b)_{0,0} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 3.333 & -2.333 \\ 0 & 0 & 0.2 \end{pmatrix} \qquad TGauss(A,b)_{0,1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.333 \\ -1.4 \end{pmatrix}
$$

Aplicando o **Método da Substituição Retroativa:**

Sejam:

$$
A := TGauss(A,b)_{0,0} \qquad b := TGauss(A,b)_{0,1}
$$

$$
A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 3.333 & -2.333 \\ 0 & 0 & 0.2 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.333 \\ -1.4 \end{pmatrix}
$$

E o programa 1.1 Mathcad que implementa a substituição retroativa:

$$
TS(a,b) := \left|
\begin{array}{l}
n \leftarrow \text{last}(b) \\
\text{for } i \in 0..n \\
\quad \left|
\begin{array}{l}
iv \leftarrow n - i \\
x_{iv} \leftarrow b_{iv} \\
\text{for } j \in iv + 1..n \qquad\qquad \text{if } i > 0 \\
\quad \left|
\begin{array}{l}
jv \leftarrow j \\
x_{iv} \leftarrow x_{iv} - a_{iv,jv} \cdot x_{jv}
\end{array}
\right. \\
x_{iv} \leftarrow \dfrac{x_{iv}}{a_{iv,iv}}
\end{array}
\right. \\
x
\end{array}
\right.
$$

Obtemos a solução do sistema de equações:

$$
TS(A,b) = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -7 \end{pmatrix}
$$

Temos também solução deste sistema usando a função interna **lsolve** do Mathcad:

$$
\text{lsolve}\left[\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -7 \end{pmatrix}
$$

Programa 1.3 – Solução de um sistema de equações lineares por Eliminação de Gauss.

```
EGauss(a,b) := | n ← last(b)
               | for k ∈ 0..n − 1
               |   | for l ∈ k + 1..n               if a_{k,k} = 0
               |   |   if a_{l,k} ≠ 0
               |   |     | for m ∈ 0..n
               |   |     |   | temp ← a_{l,m}
               |   |     |   | a_{l,m} ← a_{k,m}
               |   |     |   | a_{k,m} ← temp
               |   |     | temp ← b_l
               |   |     | b_l ← b_k
               |   |     | b_k ← temp
               |   |     | break
               |   | for i ∈ k + 1..n
               |   |   | for j ∈ k + 1..n
               |   |   |   a_{i,j} ← (−a_{i,k} / a_{k,k})·a_{k,j} + a_{i,j}
               |   |   | b_i ← (−a_{i,k} / a_{k,k})·b_k + b_i
               | for i ∈ 0..n
               |   | iv ← n − i
               |   | x_{iv} ← b_{iv}
               |   | for j ∈ iv + 1..n               if i > 0
               |   |   | jv ← j
               |   |   | x_{iv} ← x_{iv} − a_{iv,jv}·x_{jv}
               |   | x_{iv} ← x_{iv} / a_{iv,iv}
               | x
```

OBS: troca de linhas para evitar divisão por zero (pivô nulo).

eliminação gaussiana - zero abaixo do pivô

substituição retroativa

Dada a matriz dos coeficientes e o vetor dos termos independentes de um sistema de equações lineares:

$$A := \begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 & 6.6 & -1.1 \\ 4.5 & -1.8 & -0.3 & 6.5 \\ -7.3 & 9.7 & 10.9 & -4.1 \\ 8.1 & -2.7 & 8.7 & 8.9 \end{pmatrix} \qquad b := \begin{pmatrix} 1 \\ 0.1 \\ 0.01 \\ 0.001 \end{pmatrix}$$

Usando a função EGauss acima:

$$\mathrm{EGauss}(A,b)=\begin{pmatrix}-3.93715859521961\\-2.97525734578715\\0.745906020950905\\1.95161880959333\end{pmatrix}$$

Usando a função lsolve do Mathcad:

$$\mathrm{lsolve}(A,b)=\begin{pmatrix}-3.93715859521957\\-2.97525734578712\\0.745906020950899\\1.95161880959331\end{pmatrix}$$

Observa-se que a função EGauss e lsolve estão dando praticamente a mesma solução.

Resolvendo-se usando lsolve com 30 casas decimais e comparando-se

$$\mathrm{lsolve}(A,b)\ \mathrm{float},30\ \rightarrow\begin{pmatrix}-3.9371585952195628203\\-2.9752573457871181164\\.74590602095089835895\\1.9516188095933060907\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-3.9371585952195628203\\-2.9752573457871181164\\.74590602095089835895\\1.9516188095933060907\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-3.93715859521961\\-2.97525734578715\\0.745906020950905\\1.95161880959333\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4.752\times10^{-14}\\3.197\times10^{-14}\\-6.661\times10^{-15}\\-2.398\times10^{-14}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-3.9371585952195628203\\-2.9752573457871181164\\.74590602095089835895\\1.9516188095933060907\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-3.93715859521957\\-2.97525734578712\\0.745906020950899\\1.95161880959331\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7.105\times10^{-15}\\1.776\times10^{-15}\\0\\-3.997\times10^{-15}\end{pmatrix}$$

Conclui-se que o lsolve é ligeiramente mais exato que EGauss.

Exemplos: Jacobi e Gauss-Seidel

Jacobi

$x := 0 \qquad y := 0 \qquad z := 0$

$$xn := \frac{78 + 10y + 2z}{30} \qquad xn = 2.6$$

$$yn := \frac{-120 - x + 3z}{70} \qquad yn = -1.71$$

$$zn := \frac{900 - 3x + 2y}{100} \qquad zn = 9$$

$$E := \max(|xn - x|, |yn - y|, |zn - z|) \qquad E = 9$$

$x := 2.6 \qquad y := -1.71 \qquad z := 9$

$$xn := \frac{78 + 10y + 2z}{30} \qquad xn = 2.63$$

$$yn := \frac{-120 - x + 3z}{70} \qquad yn = -1.37$$

$$zn := \frac{900 - 3x + 2y}{100} \qquad zn = 8.89$$

$$E := \max(|xn - x|, |yn - y|, |zn - z|) \qquad E = 0.344$$

$x := 2.63 \qquad y := -1.37 \qquad z := 8.89$

$$xn := \frac{78 + 10y + 2z}{30} \qquad xn = 2.74$$

$$yn := \frac{-120 - x + 3z}{70} \qquad yn = -1.37$$

$$zn := \frac{900 - 3x + 2y}{100} \qquad zn = 8.89$$

$$E := \max(|xn - x|, |yn - y|, |zn - z|) \qquad E = 0.106$$

$x := 2.74 \qquad y := -1.37 \qquad z := 8.89$

$$xn := \frac{78 + 10y + 2z}{30} \qquad xn = 2.74$$

$$yn := \frac{-120 - x + 3z}{70} \qquad yn = -1.37$$

$$zn := \frac{900 - 3x + 2y}{100} \qquad zn = 8.89$$

$$E := \max(|xn - x|, |yn - y|, |zn - z|) \qquad E = 4 \times 10^{-3}$$

Gauss- Seidel

$xa := 0 \qquad ya := 0 \qquad za := 0$

$x := xa \qquad y := ya \qquad z := za$

$$x := \frac{78 + 10y + 2z}{30} \qquad x = 2.6$$

$$y := \frac{-120 - x + 3z}{70} \qquad y = -1.75$$

$$z := \frac{900 - 3x + 2y}{100} \qquad z = 8.89$$

$$E := \max(|x - xa|, |y - ya|, |z - za|) \qquad E = 8.887$$

$xa := 2.6 \qquad ya := -1.75 \qquad za := 8.89$

$x := xa \qquad y := ya \qquad z := za$

$$x := \frac{78 + 10y + 2z}{30} \qquad x = 2.61$$

$$y := \frac{-120 - x + 3z}{70} \qquad y = -1.37$$

$$z := \frac{900 - 3x + 2y}{100} \qquad z = 8.89$$

$$E := \max(|x - xa|, |y - ya|, |z - za|) \qquad E = 0.379$$

$xa := 2.61 \qquad ya := -1.37 \qquad za := 8.89$

$x := xa \qquad y := ya \qquad z := za$

$$x := \frac{78 + 10y + 2z}{30} \qquad x = 2.74$$

$$y := \frac{-120 - x + 3z}{70} \qquad y = -1.37$$

$$z := \frac{900 - 3x + 2y}{100} \qquad z = 8.89$$

$$E := \max(|x - xa|, |y - ya|, |z - za|) \qquad E = 0.126$$

$xa := 2.74 \qquad ya := -1.37 \qquad za := 8.89$

$x := xa \qquad y := ya \qquad z := za$

$$x := \frac{78 + 10y + 2z}{30} \qquad x = 2.74$$

$$y := \frac{-120 - x + 3z}{70} \qquad y = -1.37$$

$$z := \frac{900 - 3x + 2y}{100} \qquad z = 8.89$$

$$E := \max(|x - xa|, |y - ya|, |z - za|) \qquad E = 4 \times 10^{-3}$$

Podemos desenvolver programas Mathcad que realizam a solução dos sistemas pelos métodos de Jacobi e Gauss-Seidel automaticamente. Isto está presente nos programas de computadores na solução de sistemas de equações lineares usando os referidos métodos.

Método Iterativo de Jacobi

```
Jacobi(A, b, xi, kmax) := | n ← last(b)
                          | for i ∈ 0..n
                          |   M[0,i] ← xi[i]
                          | M[0,n+1] ← "x"
                          | for j ∈ 1..kmax
                          |   | for i ∈ 0..n
                          |   |   | t ← b[i]
                          |   |   | for k ∈ 0..n
                          |   |   |   t ← t − A[i,k]·xi[k]  if k ≠ i
                          |   |   | t ← t / A[i,i]
                          |   |   | M[j,i] ← t
                          |   | for i ∈ 0..n
                          |   |   | xi[i] ← M[j,i]
                          |   |   | d[i] ← |M[j,i] − M[j−1,i]|
                          |   | M[j,n+1] ← max(d)
                          | M
```

$$A := \begin{pmatrix} 30 & -10 & -2 \\ 1 & 70 & -3 \\ 3 & -2 & 100 \end{pmatrix} \qquad b := \begin{pmatrix} 78 \\ -120 \\ 900 \end{pmatrix} \qquad xi := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Jacobi}(A, b, xi, 3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \text{"x"} \\ 2.6 & -1.71 & 9 & 9 \\ 2.63 & -1.37 & 8.89 & 0.35 \\ 2.74 & -1.37 & 8.89 & 0.11 \end{pmatrix}$$

Método Iterativo de Gauss-Seidel

```
Gauss(A, b, xi, kmax) := | n ← last(b)
                         | for i ∈ 0..n
                         |   M[0,i] ← xi[i]
                         | M[0,n+1] ← "x"
                         | for j ∈ 1..kmax
                         |   | for i ∈ 0..n
                         |   |   | t ← b[i]
                         |   |   | for k ∈ 0..n
                         |   |   |   t ← t − A[i,k]·xi[k]  if k ≠ i
                         |   |   | t ← t / A[i,i]
                         |   |   | M[j,i] ← t
                         |   |   | xi[i] ← M[j,i]
                         |   | for i ∈ 0..n
                         |   |   d[i] ← |M[j,i] − M[j−1,i]|
                         |   | M[j,n+1] ← max(d)
                         | M
```

$$A := \begin{pmatrix} 30 & -10 & -2 \\ 1 & 70 & -3 \\ 3 & -2 & 100 \end{pmatrix} \qquad b := \begin{pmatrix} 78 \\ -120 \\ 900 \end{pmatrix} \qquad xi := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Gauss}(A, b, xi, 3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \text{"x"} \\ 2.6 & -1.75 & 8.89 & 8.89 \\ 2.61 & -1.37 & 8.89 & 0.38 \\ 2.74 & -1.37 & 8.89 & 0.13 \end{pmatrix}$$